מבחן באלגברה 1 מ'

חורף תשס"ט מועד א'

מספר סטודנט:		פקולטה:	

- משך הבחינה <u>3 שעות</u>.
- במבחן <u>5</u> שאלות. יש לפתור את כל <u>5</u> השאלות ולנמק היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב! את כל הנימוקים יש לרשום בדפים אלה.
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון.
- אין להוסיף דפים.

<u>בהצלחה!</u>

לשימוש הבודקים

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	
שאלה 5	

שאלת ש"ב 5 ד,ה

ציון	

<u>שאלה מס. 1</u> (25 נקודות)

יהי V מרחב המטריצות הממשיות 2 x 2 ותהי $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$. תהי $T:V\to V$

הטרנספורמציה הלינארית המוגדרת ע"י $T(X)=AX$, לכל X ב- V.

א. רשום את המטריצה המייצגת $[T]_E$ של T לפי הבסיס הסטנדרטי

$E=(E_1,E_2,E_3,E_4)$ כאשר:

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad E_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad E_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad E_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ב. תהי $U=(U_1,U_2,U_3,U_4)$ כאשר:

$$U_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad U_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad,\quad U_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad,\quad U_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

הוכח ש- U הוא בסיס של V וחשב את מטריצת המעבר מ- E ל- U.

ג. רשום את $[T]_U$ המטריצה המייצגת של T לפי בסיס U.

ד. נתון ש- $[X]_U=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$, $X\in V$. מצא את $[T(X)]_E$.

ה. האם $V=\mathrm{Im}(T)\oplus\ker(T)$?

ריכוז תשובות

א. $[T]_E =$

ב. מטריצת המעבר מ- E ל- U:

ג. $[T]_U =$

ד. $[T(X)]_E =$

ה.

כן	לא

<u>שאלה מס. 2</u> (15 נקודות)

תהי A מטריצה הפיכה n x n מעל $\mathbb{C}$, $n \geq 2$.

א. חשב את $\det(adj(A))$

ב. הוכח שקיים מספר מרוכב c כך ש- $adj(adj(A)) = cA$

ג. חשב את c בחלק ב' עבור המטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}$

ריכוז תשובות

א.

$\det(adj(A)) =$

ג.

$c =$

<u>שאלה מס. 3</u> (15 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix} x & x & x \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ מטריצה מעל $\mathbb{R}$.

א. מצא את כל הערכים של x עבורם A ניתנת לליכסון.

ב. יהי x = 1 במטריצה A לעיל. מצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש- $D=P^{-1}AP$.

ג. הוכח שאם A ניתנת לליכסון אז $A^{2009}\neq 0$

ריכוז תשובות

א. הערכים של x עבורם A ניתנת לליכסון:

x =

ב.

D =	P =

<u>שאלה מס. 4</u> (25 נקודות)

יהי V מרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר 2 מעל הממשיים. לכל p(x), q(x)

ב- V נגדיר $(p(x),q(x)) = p(2)q(2) + p(1)q(1) + p(0)q(0)$

א. הוכח ש- (,) המוגדרת לעיל היא מכפלה פנימית על V.

ב. יהי $B = (v_1, v_2, v_3)$, כאשר $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$, בסיס של V.

הפעל על B תהליך גרם-שמידט כדי לקבל בסיס אורתונורמלי (u_1, u_2, u_3),

ביחס למכפלה הפנימית הנתונה.

ג. מצא וקטור v באורך 1 הניצב ל- x^2+1 וניצב ל- x, ביחס למכפלה

הפנימית הנתונה.

ד. יהי W תת המרחב של V הנפרש ע"י x וְ- 1.

מצא את ההיטל הניצב E_W של x^2 על W.

ריכוז תשובות

ב.

$u_1 =$

$u_2 =$

$u_3 =$

ג.

$v =$

ד.

$E_W(x^2) =$

<u>שאלה מס. 5</u> (20 נקודות)

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. אם V מרחב וקטורי ממשי עם בסיסים סדורים $B_1 = (v_1, \ldots, v_n)$

וְ- $B_2 = (w_1, \ldots, w_n)$ וְ- T אופרטור לינארי $T : V \to V$

כך ש- $T(v_i) = w_i$, $i = 1, \ldots, n$, אז $[T]_{B_1} = [T]_{B_2}$.

ב. אם A מטריצה n x n ניתנת לליכסון אז גם $A + nI_n$ ניתנת לליכסון.

ג. אם $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ טרנספורמציה לינארית וקיים וקטור v ב- V,

כך ש- Ker(T) + Sp{v} = Im(T) אז $\dim(\ker T) < \dim(\operatorname{Im} T)$.

בחר אחד מהסעיפים ד' וְ- ה'.

ד. אם U_1, U_2 ו- W הם תת מרחבים של מרחב וקטורי V המקיימים

$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W$ אז $U_1 = U_2$.

ה. אם A היא מטריצה ריבועית שאינה הפיכה אז קיימת מטריצה B שונה

מאפס כך ש- AB=0.